СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ивлев Е.Т., Лучинин А.А. Отображения p-мерного аффинного пространства в многообразие гиперконусов n-мерного // Известия Томского политехнического университета. – 2010. – Т. 317. – № 2. – С. 5–8.
2. Акивис М.А. Фокальные образы поверхности ранга r // Известия вузов. Математика. – 1957. – № 1. – С. 9–19.
3. Акивис М.А. Об одном классе тангенциально вырожденных поверхностей // Доклады АН СССР. – 1962. – Т. 146. – № 3. – С. 515–518.
4. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия многомерных поверхностей // Итоги науки. Вып. Геометрия. 1963. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1965. – С. 5–64.
5. Остиану Н.М О геометрии многомерной поверхности проективного пространства // Тр. геометрич. семинара. – Т. 1. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1966. – С. 239–263.
6. Швейкин П.И. Нормальные геометрические объекты поверхности в аффинном пространстве // Труды геометрич. семинара. – Т. 1. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1966. – С. 331-423.
7. Ивлев Е.Т. О многообразии $E(L,L_m,L_{m+1}^{\widehat{\alpha}})$ в n-мерном проективном пространстве $P_n(m>2)$ // Сибирский математический журнал. – 1967. – Т. 8. – № 6. – С. 1307–1320.
8. Ивлев Е.Т., Молдаванова Е.А. О дифференцируемых отображениях аффинных пространств в многообразие m-плоскостей в многомерном евклидовом пространстве // Известия вузов. Математика. – 2009. – № 11. – С. 24–42.

Поступила 19.03.2010 г.

УДК 512.541

КОРРЕКТНОСТЬ И СЕРВАНТНАЯ КОРРЕКТНОСТЬ ОДНОРОДНЫХ ВПОЛНЕ РАЗЛОЖИМЫХ ГРУПП

А.И. Шерстнёва, С.Я. Гриншпон*, О.В. Янущик, В.С. Шерстнёв

Томский политехнический университет
*Томский государственный университет
E-mail: sherstneva@tpu.ru

Выясняется, будет ли верен аналог известной теоретико-множественной теоремы Кантора–Шрёдера–Бернштейна для групп в случае, когда одна из групп является однородной вполне разложимой. Получены критерии корректности и сервантной корректности однородной вполне разложимой группы.

Ключевые слова:
Алгебра, абелевы группы, почти изоморфизм групп, корректные группы, сервантно корректные группы, однородные вполне разложимые группы.

Key words:
Algebra, abelian groups, almost isomorphism of groups, correct groups, purely correct groups, homogeneous completely decomposable groups.

Известная теоретико-множественная теорема Кантора–Шрёдера–Бернштейна явилась источником постановки аналогичных задач в различных областях математики, в том числе и в теории абелевых групп.

Две группы, каждая из которых изоморфна подгруппе другой группы, называются *почти изоморфными* [1]. Две группы называются *почти изоморфными по подгруппам с некоторым свойством*, если каждая из них изоморфна подгруппе другой группы, обладающей этим свойством. В частности, группы A и B – почти изоморфны по сервантным подгруппам, если каждая из них изоморфна сервантной подгруппе другой группы.

Естественно возникает вопрос, будет ли из почти изоморфизма групп следовать их изоморфизм. Эта задача привлекала внимание многих алгебраистов [2–6].

При выяснении, будет ли верен аналог теоретико-множественной теоремы Кантора–Шрёдера–Бернштейна для абелевых групп, удобен подход, когда одна из групп фиксируется, а другая пробегает весь класс абелевых групп.

Группа A называется *корректной*, если для любой группы B из того, что A и B – почти изоморфны, следует $A\cong B$. Группа A называется *сервантно корректной* (*f.i.-корректной*), если для любой группы B из того, что A и B – почти изоморфны по сервантным (вполне характеристическим) подгруппам, следует $A\cong B$ [7. С. 65].

Корректные и сервантно корректные абелевы группы выделяются в [8–10]. В [7], [11] и [12] описываются классы абелевых групп, являющихся f.i.-корректными.

Приведём используемые в работе понятия.

Всякая последовательность $v=(v_1,v_2,...)$, состоящая из целых неотрицательных чисел и символов ∞, называется *характеристикой*. Характеристики $v=(v_1,v_2,...)$ и $u=(u_1,u_2,...)$ называются *эквивалентными*, если $v_i\neq u_i$ имеет место лишь для конечного числа номеров i и только тогда, когда v_i и u_i конечны. Класс эквивалентности в множестве характеристик называется *типом* [13. С. 130].

Если A – группа без кручения и $a\in A$, то *характеристика элемента* a, обозначаемая $\chi(a)$, – это такая характеристика $v=(v_1,v_2,...)$, в которой каждое v_i – это p_i-высота элемента a (p_i – i-е простое число). *Тип элемента a*, обозначаемый $t(a)$, – это тип, которому принадлежит $\chi(a)$ [13. С. 129].

Группа без кручения A называется *однородной типа t*, если любой ненулевой элемент этой группы имеет тип t [13. С. 131].

Группа без кручения A называется *вполне разложимой*, если она является прямой суммой групп ранга 1 [13. С. 131].

Будем говорить, что вполне разложимая группа *A корректна в классе вполне разложимых групп*, если для любой вполне разложимой группы B из того, что A и B – почти изоморфны, следует $A\cong B$.

Через $r(A)$ обозначается ранг группы A.

Докажем следующие два вспомогательных утверждения.

Лемма 1. *Если для любой сервантной подгруппы B группы A из того, что A изоморфна некоторой сервантной подгруппе C группы B, следует $A\cong B$, то группа A является сервантно корректной.*

Доказательство.

Рассмотрим группу A' такую, что A и A' – почти изоморфны по сервантным подгруппам. Тогда $A\cong B'$, $A'\cong B$, где B' и B – сервантные подгруппы групп A' и A соответственно. Пусть φ – изоморфное отображение A' на B и $\varphi(B')=C$. Так как B' – сервантная подгруппа группы A', C – сервантная подгруппа группы C. Имеем $A\cong B'\cong\varphi(B')=C$, то есть $A\cong C$. Используя условие леммы, получаем, что $A\cong B$. Но $B\cong A'$, откуда следует, что $A\cong A'$. Таким образом, группа A является сервантно корректной.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Если для любой подгруппы B группы A из того, что A изоморфна некоторой подгруппе C группы B, следует $A\cong B$, то группа A является корректной.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.

Основными результатами работы являются следующие теоремы.

Теорема 3. *Однородная вполне разложимая группа корректна тогда и только тогда, когда она имеет конечный ранг или является свободной группой.*

Доказательство.

1. Пусть A – однородная вполне разложимая группа, не являющаяся свободной и имеющая бесконечный ранг. Тогда группа A имеет ненулевой тип и её можно представить в следующем виде: $A=A^*\oplus A'$, где A' имеет ранг 1 и $A^*\cong A$. Пусть $a\in A'$ и $B'=\langle a\rangle$. Обозначим через B группу $A^*\oplus B'$. Так как $A\cong A^*$, группы A и B являются почти изоморфными. Поскольку B' имеет нулевой тип, а A^* – ненулевой, группа B не является однородной, следовательно, A и B – не изоморфные группы. Получаем, что группа A не является корректной.

2. Пусть A – свободная группа или имеет конечный ранг; B – подгруппа группы A; C – подгруппа группы B и $A\cong C$. Покажем, что $A\cong B$. Тогда согласно лемме 2 этим будет доказано, что группа A является корректной.

Имеем $C\subseteq B\subseteq A$, следовательно, $r(C)\leq r(B)\leq r(A)$. Но $r(A)=r(C)$, так как $A\cong C$, откуда получаем, что $r(A)=r(B)$.

Если группа A является свободной группой, то B – также свободная группа, так как подгруппы свободных групп свободны. Получаем, что A и B – свободные группы, имеющие один и тот же ранг, следовательно, $A\cong B$.

Рассмотрим теперь случай, когда группа A имеет конечный ранг. Обозначим через t тип группы A.

Покажем, что группа B является однородной типа t. Обозначим через $a_1,a_2,...,a_k$ – максимальную линейно независимую систему элементов группы C. Типом этих элементов в группе C является t, так как $A\cong C$. C – подгруппа группы B, следовательно, тип этих элементов в группе B больше или равен t. Но с другой стороны B – подгруппа группы A, откуда получаем, что их тип в группе B меньше или равен t. Таким образом, элементы $a_1,a_2,...,a_k$ имеют в группе B тип t. Так как $r(C)=r(B)$, то $a_1,a_2,...,a_k$ является максимальной линейно независимой системой элементов и в группе B, то есть любой элемент из группы B линейно зависит от системы элементов $a_1,a_2,...,a_k$. Из этого следует, что тип любого элемента из группы B равен t, то есть группа B является однородной типа t.

Итак, B – однородная подгруппа группы A, имеющая тот же тип, что и группа A. Тогда из [13. Теорема 86.6. С. 136] следует, что B – вполне разложимая группа. Получаем, что группы A и B – однородные вполне разложимые группы, имеющие один и тот же тип и ранг, следовательно, $A\cong B$.

Теорема доказана.

Следствие 4. *Делимая группа без кручения корректна тогда и только тогда, когда она имеет конечный ранг.*

Доказательство.

Так как делимая группа без кручения является однородной вполне разложимой группой и не является свободной, то из теоремы 3 следует, что она корректна тогда и только тогда, когда имеет конечный ранг.

Следствие доказано.

Так как при доказательстве теоремы 3 для того, чтобы показать, что группа A не является корректной, строились вполне разложимые группы B, почти изоморфные группе A, но не изоморфные ей, то имеет место следующее утверждение.

Теорема 5. *Однородная вполне разложимая группа корректна тогда и только тогда, когда она корректна в классе вполне разложимых групп.*

Теорема 6. *Однородная вполне разложимая группа сервантно корректна.*

Доказательство.

Пусть A – однородная вполне разложимая группа; B – сервантная подгруппа группы A; C – сервантная подгруппа группы B и $A\cong C$. Покажем, что $A\cong B$. Тогда согласно лемме 1 этим будет доказано, что группа A является сервантно корректной.

Аналогично доказательству теоремы 3 получаем, что $r(A)=r(B)$.

Так как B – сервантная подгруппа группы A, тип любого элемента $b \in B$ в этой группе такой же, как и в группе A. Таким образом, B – однородная подгруппа группы A, имеющая такой же тип, что и группа A. Тогда из [13. Теорема 86.6. С. 136] следует, что B – вполне разложимая группа. Получаем, что A и B – однородные вполне разложимые группы, имеющие один и тот же тип и ранг, следовательно, $A \cong B$.

Теорема доказана.

Отметим, что однородная вполне разложимая группа является также f.i.-корректной [7. Следствие 18. С. 76].

Работа поддержана ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы», Государственный контракт П 937 от 20 августа 2009 г.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Jonson B. On direct decomposition of torsion free abelian groups // Math. Scand. – 1959. – № 2. – P. 361–371.
2. Kaplansky I. Infinite Abelian groups. – Michigan: Ann. Arbor, Univ. Michigan Press, 1954. – 91 p.
3. Crawly P. Solution of Kaplansky's test problem for primary abelian groups // J. Algebra. – 1965. – № 4. – P. 413–431.
4. Corner A.L. Every countable reduced torsion free ring is an endomorphism ring // Proc. London Math. Soc. – 1963. – V. 52. – P. 687–710.
5. Sasiada E. Negative solution of I. Kaplansky first test problem for abelian groups and a problem of K. Borsuk concerning cohomology groups // Bull. Polish Acad. Sci. Math. Astron. Phys. – 1961. – № 5. – P. 331–334.
6. Fuchs L. Abelian groups. – Budapest: Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences, 1958. – 367 p.
7. Гриншпон С.Я. f.i.-корректность абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. – 1989. – Вып. 8. – С. 65–79.
8. De Groot J. Equivalent abelian groups // Canad. J. Math. – 1957. – № 9. – P. 291–297.
9. Приходько И.А. E-корректные абелевы группы // Абелевы группы и модули. – 1984. – Вып. 4. – С. 90–99.
10. Росошек С.К. Строго чисто корректные абелевы группы без кручения // Абелевы группы и модули. – 1979. – Вып. 1. – С. 143–150.
11. Гриншпон С.Я. Вполне характеристические подгруппы абелевых групп без кручения и f.i.-корректность // Вестник МГУ. Серия матем., мех. – 1981. – № 1. – С. 97–99.
12. Гриншпон С.Я. f.i.-корректные абелевы группы // Успехи матем. наук. – 1999. – Т. 54. – № 6. – С. 155–156.
13. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. – Т. 2. – М.: Мир, 1977. – 335 с.

Поступила 27.04.2010 г.

УДК 517.91

АНАЛИЗ ОБЛАСТЕЙ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЯВНЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

М.Е. Семенов, С.Н. Колупаева

Томский государственный архитектурно-строительный университет
E-mail: sme@tsuab.ru

Приведен краткий обзор неявных методов интегрирования жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Определены и представлены графически области абсолютной устойчивости для методов Гира (формул дифференцирования назад) при решении жестких систем дифференциальных уравнений. Даны рекомендации по выбору порядка метода Гира.

Ключевые слова:
Жесткие системы обыкновенных дифференциальных уравнений, неявные методы, формулы дифференцирования назад.
Key words:
Stiff systems of ordinary differential equations, implicit method, backward differentiation formulae.

При моделировании реальных процессов широко используется аппарат обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). При этом практика показывает, что начальная задача (задача Коши) для систем ОДУ может быть отнесена к следующим типам: мягкая, жесткая, плохо обусловленная и быстро осциллирующая. Каждый тип предъявляет специфические требования к методам интегрирования. К жестким системам относятся задачи химической кинетики [1, 2], нестационарные процессы в сложных электрических цепях [3, 4], системы, возникающие при решении уравнений теплопроводности и диффузии [5], движения небесных тел, искусственных спутников [6], физики пластичности [7] и многие другие.

При численном решении систем ОДУ возникают сложности, связанные с тем, что при описании сложного физического процесса скорости локальных процессов могут быть существенно различными, а переменные системы могут быть разнопорядковыми величинами и/или изменяться на интервале интегрирования на порядки величины [7].

Кроме этого при проведении физических экспериментов может наблюдаться пограничный